Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS DIÉTÉTIQUE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour la spécialité Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour la spécialité Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction** (12 questions) — **Page 3**
2. **Séries de Fourier d’une fonction paire périodique** (10 questions) — **Page 7**
3. **Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsdietetique.fr/assets/annales/bts-dietetique/E2 - Mathématiques/2023/BTS Diététique - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du meuble et le fond du tiroir est modélisée par une fonction f du temps, exprimée en centimètres. L’exercice étudie cette fonction par une équation différentielle, puis par ses limites, ses variations, un algorithme de seuil et le calcul d’une position moyenne.

Partie A

Question 1. a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

Le discriminant vaut $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Ainsi, $r = \frac{-5 \pm 3}{2}$, ce qui donne deux racines réelles distinctes.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1. b. À l’aide du tableau fourni sur les solutions des équations différentielles linéaires du second ordre, résoudre l’équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.

Les racines caractéristiques sont -1 et -4. Le tableau fourni indique que, pour deux racines réelles distinctes r_1, r_2, les solutions sont de la forme $C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$.

On applique directement cette forme à l’équation donnée.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2. a. À partir de la position initiale du tiroir, situé à 20 cm du point O, et de sa vitesse initiale de -10 cm·s⁻¹, déterminer f(0) et f'(0).

Grandeur à $t = 0$	Valeur	Interprétation
Distance OM	20 cm	Position initiale
Vitesse	-10 cm·s^{-1}	Le tiroir se rapproche de O

La vitesse est la dérivée de la distance, d’où les valeurs initiales demandées.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2. b. **Sachant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

À deux secondes, on substitue $t = 2$ dans l'expression de f :

$$f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-4\times 2}.$$

Cette expression exacte est la distance OM, en centimètres.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM = f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2. c. **Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, en justifiant la réponse.**

La fonction est continue et $f(0) = 20 > 0,5$. À quatre secondes, on obtient :

- $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,427$ cm ;
- cette distance est strictement inférieure à $0,5$ cm.

La continuité garantit donc que le seuil est franchi avant 4 secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, le tiroir est fermé en moins de 4 secondes : $f(4) \approx 0,427 < 0,5$ cm.

Partie B

Question 1. a. **Sachant que lim e⁻ᵘ = 0 lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

Quand $t \to +\infty$, les exposants $-t$ et $-4t$ tendent vers $-\infty$. Les deux exponentielles tendent donc vers 0, et leur combinaison tend également vers 0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0.$

Question 1. b. **Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote et donner une équation de cette asymptote.**

Une limite nulle à l'infini signifie que la courbe se rapproche d'une droite horizontale d'ordonnée nulle.

Son équation est $y = 0$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2. a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive terme à terme en utilisant $(e^{at})' = ae^{at}$:

1. $\left(\frac{70}{3}e^{-t}\right)' = -\frac{70}{3}e^{-t}$;
2. $\left(-\frac{10}{3}e^{-4t}\right)' = \frac{40}{3}e^{-4t}$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2. b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Comme $f'(t) < 0$, la fonction est strictement décroissante. De plus, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$ et $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$		$-$
$f(t)$	20	$\searrow$ 0

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

f décroît de 20 vers 0 sur $[0, +\infty[$.

Question 3. a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en indiquant les valeurs de t, les valeurs de f(t) arrondies au centième et le résultat de la condition, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition** $f(t) > 0,5$
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

La boucle continue tant que la condition est vraie ; elle s'arrête donc à la ligne 39.

✓ RÉPONSE À RETENIR

À l'arrêt, la dernière valeur calculée est $t = 3,9$.

Question 3. b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

La condition est encore vraie à $t = 3,8$, car $f(3,8) \approx 0,52 > 0,5$. À $t = 3,9$, elle devient fausse puisque $f(3,9) \approx 0,47 < 0,5$. L'algorithme repère ainsi le premier dixième de seconde où le tiroir satisfait le critère de fermeture.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3,9$ s : la distance est alors inférieure à $0,5$ cm.

Question 4. La position moyenne est définie par m = 1/4 ∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. Ainsi :

$$m = \frac{1}{4}\big(F(4) - F(0)\big) = \frac{1}{4}\left(-\frac{70}{3}e^{-4} + \frac{5}{6}e^{-16} + \frac{70}{3} - \frac{5}{6}\right) = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$m = \dfrac{45}{8} - \dfrac{35}{6}e^{-4} + \dfrac{5}{24}e^{-16}$.

2. Séries de Fourier d'une fonction paire périodique

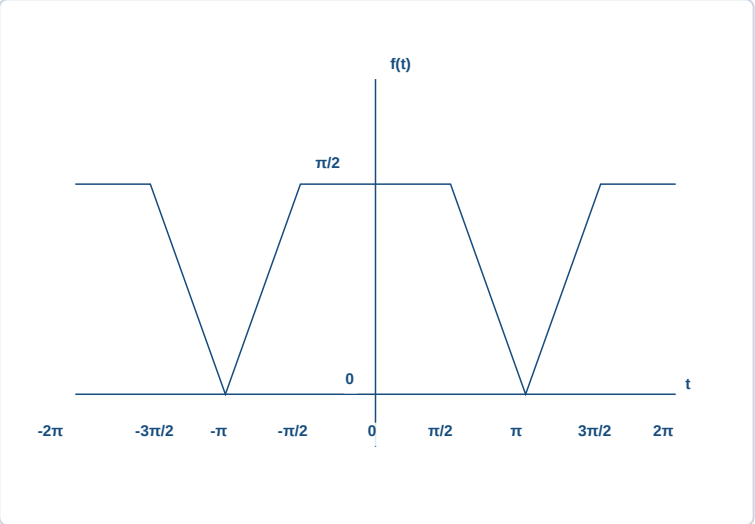
L'exercice étudie une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π]. Il porte sur sa représentation graphique, les coefficients et la somme partielle de Fourier d'ordre 3, puis sur l'approximation de la valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle [-2π ; 2π], en utilisant sa définition par morceaux, sa parité et sa périodicité.

1. Sur $[0;\pi]$, la courbe reste au niveau $\pi/2$ jusqu'à $\pi/2$, puis décroît en ligne droite jusqu'à 0 en π. La parité donne le tracé sur $[-\pi;0]$.
2. On répète ensuite ce motif par translations de vecteur $(2\pi;0)$, afin de couvrir $[-2\pi;2\pi]$.

Les segments se raccordent continûment aux points de rupture. Les plateaux sont horizontaux et les portions inclinées sont affines.

Représentation de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Plateaux à $\pi/2$, zéros en $\pm\pi$, avec période 2π.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

Le coefficient associé aux sinus s'obtient en intégrant le produit de $f(t)$ par $\sin(nt)$ sur une période. Comme f est paire et $\sin(nt)$ est impaire, leur produit est impair. Son intégrale sur l'intervalle symétrique $[-\pi;\pi]$ est donc nulle. La formule du coefficient, écrite sur cet intervalle, donne directement :

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = 0.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. **Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.**

Donnée	Relation
Période	$T = 2\pi$
Pulsation	$\omega = \frac{2\pi}{T}$

Le formulaire relie la pulsation à la période par $\omega = 2\pi/T$. La fonction a pour période 2π, donc on remplace T par cette valeur. Les facteurs 2π se simplifient. La pulsation s'exprime ici en radians par unité de temps.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\omega = 1\ \text{rad}$ par unité de temps.

Question 4. **Démontrer que le coefficient constant de Fourier a₀ est égal à 3π/8.**

Le formulaire donne $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$. La fonction est paire et de période 2π, donc cette moyenne s'écrit $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. Sur $[0;\pi/2]$, l'aire est celle d'un rectangle de hauteur $\pi/2$. Sur $[\pi/2;\pi]$, elle est celle d'un triangle de base et de hauteur $\pi/2$. Ainsi :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8}\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. **Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, aₙ = ∫₀^{π/2} cos(nt)dt + (2/π)∫_{π/2}^{π} (π - t)cos(nt)dt.**

1. La fonction est paire et sa période vaut 2π. Le formulaire donne donc $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$, car $\omega = 1$.
2. On remplace $f(t)$ par sa définition sur chacun des intervalles. Le premier terme se simplifie avec le facteur $2/\pi$:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt\right) = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La décomposition donne la formule demandée pour tout entier $n \geq 1$.

Question 6. **En admettant que $a_n = 2/(\pi n^2)[\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi)]$, déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.**

On applique la formule admise $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos(n\pi)\right)$ pour les trois premiers entiers. Les valeurs utiles sont $\cos(\pi/2) = 0$, $\cos(\pi) = -1$, $\cos(\pi) = -1$, $\cos(2\pi) = 1$, $\cos(3\pi/2) = 0$ et $\cos(3\pi) = -1$. Les substitutions donnent :

n	Coefficient exact
1	$a_1 = \frac{2}{\pi}$
2	$a_2 = -\frac{1}{\pi}$
3	$a_3 = \frac{2}{9\pi}$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{2}{9\pi}.$

Question 7. **À partir des résultats précédents, déduire que $s_3(t) = 3\pi/8 + (2/\pi)\cos(t) - (1/\pi)\cos(2t) + (2/(9\pi))\cos(3t)$.**

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$, puisque la pulsation vaut 1. Les coefficients b_n sont nuls. On remplace alors a_0 par $3\pi/8$, puis a_1, a_2 et a_3 par les valeurs exactes obtenues précédemment. On obtient :

$$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$$

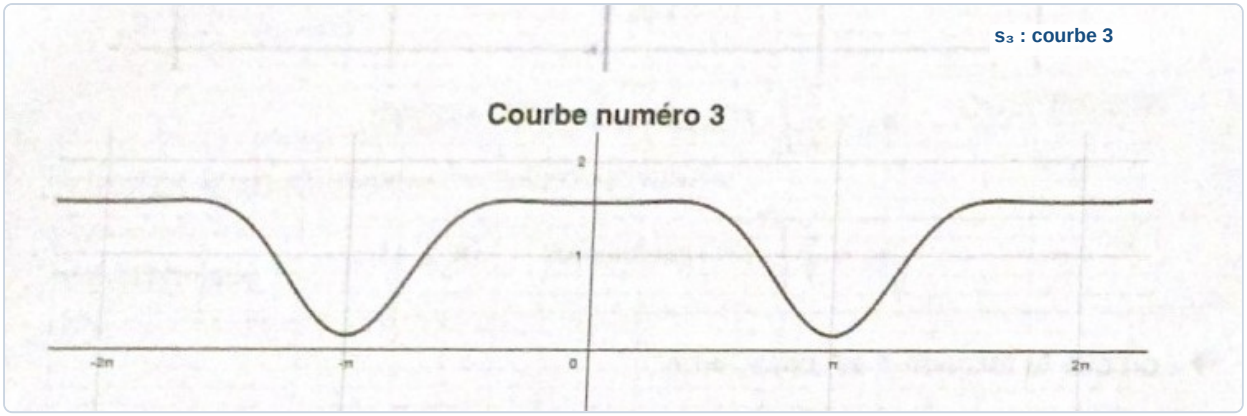
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$

Question 8. **Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées est associée à la fonction s_3.**

> La consigne demande uniquement le numéro de la courbe associée à la somme partielle s_3, sans justification. La réponse à reporter est donc le numéro de la courbe correspondante parmi les trois tracés proposés.

Courbe associée à s_3



✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe numéro 3.

Question 9. a. Pour P = $(a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.

On remplace les coefficients exacts dans la définition de P :

$$P = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{9\pi}\right)^2\right].$$

Le premier terme vaut environ $1{,}3879$, et le terme entre crochets, multiplié par $1/2$, vaut environ $0{,}2558$. La somme s'arrondit à quatre décimales comme demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P \approx 1{,}6437$ à 10^{-4} près.

Question 9. b. Sachant que $F^2 = \pi^2/6$ et que P constitue une approximation de F^2, choisir le pourcentage d'erreur de cette approximation parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est attendue, sans justification.

La consigne demande de choisir une seule valeur parmi $0{,}1\,\%$, $1\,\%$ et $10\,\%$, sans justification. Il faut reporter la proposition correspondant à l'ordre de grandeur de l'erreur entre l'approximation P et la valeur F^2. La réponse retenue est celle indiquée ci-dessous.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$0{,}1\,\%$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2023, code 23MATGRB2, dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Ses deux exercices de 10 points étudient la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et analyse de fonction, puis les séries de Fourier d'une fonction paire périodique et l'approximation de sa valeur efficace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, la résolution s'appuie sur l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$.
- Si $f'(t) < 0$ sur un intervalle, f y est strictement décroissante.
- La pulsation vaut $\omega = 2\pi/T$; pour une fonction paire, les coefficients sinus b_n sont nuls.
- La somme partielle s_3 de Fourier conserve les termes jusqu'à l'indice n = 3 et approche la fonction périodique.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités du modèle : f est une distance en centimètres et t un temps en secondes.
- Dans l'algorithme, suivre l'ordre des mises à jour et tester la condition à chaque valeur de t.
- Distinguer le coefficient constant a_0 des coefficients a_n pour n supérieur ou égal à 1.
- Pour l'erreur relative, comparer P à F^2, puisque P approxime F^2, et non à F.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment exploiter les conditions initiales du tiroir ?

La distance initiale donne f(0) = 20. La vitesse initiale correspond à la dérivée de la distance par rapport au temps, donc $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}, puisque le tiroir se rapproche de O.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls pour cette fonction ?

La fonction f est paire et sin(nt) est impaire. Leur produit est donc impair, et son intégrale sur un intervalle symétrique est nulle. Ainsi, tous les coefficients b_n sont nuls.

Q : Comment organiser le temps pour cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et peuvent être traités indépendamment. Répartissez le temps entre eux en fonction de votre aisance, puis gardez une marge pour vérifier calculs, unités, tableaux et réponses à choix multiples.

Q : Le coefficient est-il identique pour les deux spécialités ?

Non. Le sujet indique un coefficient de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. La présentation des résultats et les justifications demandées doivent aussi être soignées.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsdietetique.fr/assets/annales/bts-dietetique/E2 - Mathématiques/2023/BTS Diététique - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Diététique : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.