Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS DIÉTÉTIQUE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation du freinage d'un chariot (12 questions) **Page 3**

2. Transformées de Laplace et signaux d'un système électrique (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsdietetique.fr/assets/annales/bts-dietetique/E2 - Mathématiques/2022/BTS Diététique - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation du freinage d'un chariot

Un chariot lancé à 20 m/s est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction du temps. L'exercice étudie cette fonction à l'aide d'une équation différentielle, de ses variations et de son intégrale, puis examine son développement limité et la tangente en zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.

On applique la formule fournie pour une équation homogène de la forme $y' + ay = 0$: ses solutions sont $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, le coefficient est $a = 0,8$. Le domaine demandé est $[0; +\infty[$, donc cette expression convient pour tout t de cet intervalle.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les solutions sont $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

1. La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$.
2. En substituant dans le membre de gauche, on trouve $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$.
3. Cette valeur étant égale au second membre de l'équation, g vérifie bien l'équation différentielle $y' + 0,8y = 4$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est bien une solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1.c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Principe : toute solution de l'équation complète s'obtient en ajoutant une solution de l'équation homogène à une solution particulière. La solution particulière constante $g(t) = 5$ a été vérifiée à la question précédente, tandis que les solutions homogènes sont $ke^{-0,8t}$. Leur somme donne donc toutes les solutions sur $[0; +\infty[$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, pour $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

Étape	Relation
Solution générale	$f(t) = ke^{-0,8t} + 5$
Condition initiale	$f(0) = k + 5 = 20$
Constante	$k = 20 - 5 = 15$

On utilise $e^0 = 1$ dans la condition initiale, puis on remplace k par 15 dans la solution générale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La solution vérifiant $f(0) = 20$ est $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. **Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.**

La fonction est $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$. L'exponentielle tend alors vers zéro. Par somme et produit, le terme $15e^{-0,8t}$ tend vers zéro et il reste la constante 5. Cette limite est donc directement déterminée par l'expression de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. **Déduire de cette limite une équation de l'asymptote à la courbe représentative C de f.**

> Une courbe dont la fonction tend vers une valeur finie L lorsque t tend vers $+\infty$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = L$. Ici, la limite établie en 1.a vaut 5. L'asymptote de C est donc la droite horizontale d'ordonnée 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'asymptote horizontale à C, en $+\infty$, a pour équation $y = 5$.

Question 2. **À partir de l'expression de f'(t) fournie, dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.**

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$. Ainsi, la dérivée fournie est strictement négative et f est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et $f(t)$ tend vers 5 en $+\infty$.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	5
Variation	$20 \searrow 5$	

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0;+\infty[$, f décroît strictement de 20 vers 5.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Un arrêt exigerait que la vitesse atteigne 0. Or, pour tout temps fini, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse ne s'annule jamais. Elle se rapproche de $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ lorsque le temps augmente, sans atteindre cette valeur.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le chariot ne s'arrête pas, car sa vitesse reste supérieure à $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Question 4.a. Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

1. On dérive le terme exponentiel avec la règle de la chaîne : $\frac{d}{dt}e^{-0,8t} = -0,8e^{-0,8t}$.
2. Ainsi, $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$.
3. Cette dérivée est exactement l'expression de $f(t)$. Par conséquent, F est une primitive de f sur l'intervalle demandé.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. À l'aide de l'intégrale de la vitesse, calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre t = 0 et t = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance est l'intégrale de la vitesse entre 0 et 1. Avec la primitive donnée, le théorème fondamental donne :

$$d = F(1) - F(0) = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}.$$

Cette valeur exacte est environ $15,3251$ m. Arrondie au centimètre, elle devient $15,33$ m.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m}$, soit $15,33\ \mathrm{m}$ au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir parmi les propositions le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le logiciel donne la partie régulière $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste doit s'écrire $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers zéro. Il faut donc choisir la proposition qui conserve les trois termes affichés et présente le reste sous cette forme.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La troisième proposition : $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)t$. Les données donnent $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12e^{-0{,}8\times 0} = -12$. Son ordonnée à l'origine est donc 20 et son coefficient directeur est -12.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'équation de la tangente en $t = 0$ est $T : y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace et signaux d'un système électrique

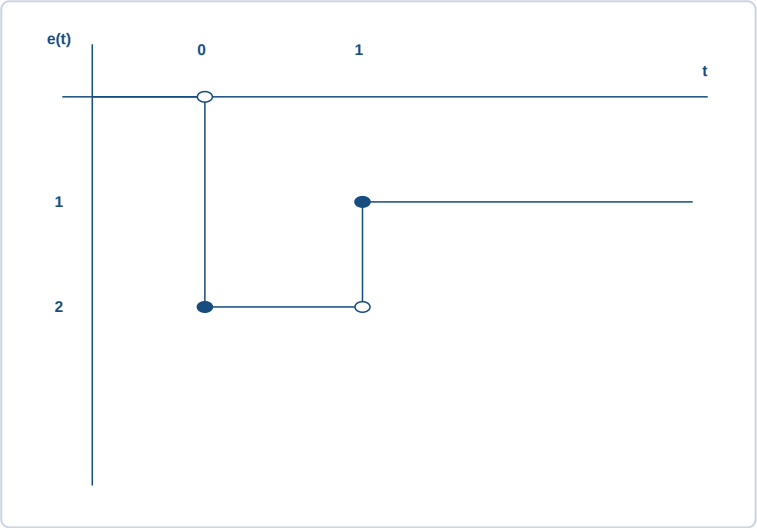
Un système électrique entrée-sortie reçoit un signal construit avec des échelons unité et possède une fonction de transfert donnée. L'exercice demande de représenter le signal d'entrée, d'utiliser les transformées de Laplace pour étudier le signal de sortie, puis d'en calculer une valeur et la limite à l'infini.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Tracer sur le document-réponse la courbe représentative de e(t) = 2U(t) - U(t - 1).

La causalité impose **e(t)=0** pour t<0. À partir de 0, le premier échelon fait passer le signal à 2. À l'instant 1, le second échelon est activé et retranche 1 : le signal vaut alors 1. Les valeurs aux instants de saut suivent la définition de U : U(0)=1, donc e(0)=2 et e(1)=1. Les cercles ouverts indiquent les valeurs non prises aux extrémités des paliers.

Signal d'entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = 2$ si $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée.

La transformation de Laplace est linéaire. Le formulaire donne $\mathcal{L}\{U(t)\} = 1/p$ et $\mathcal{L}\{U(t-a)\} = e^{-ap}/p$. On applique ces formules aux deux termes de $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$, avec un retard $a = 1$ pour le second échelon. On soustrait ensuite les transformées, en conservant le facteur 2 du premier terme.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. **Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/[p(p + 1)]]e^(-p).**

Par définition de la fonction de transfert, $S(p) = H(p)E(p)$. On utilise $H(p) = 1/(p+1)$ et le résultat de la question précédente, $E(p) = (2 - e^{-p})/p$. Le produit s'écrit donc $(2 - e^{-p})/[p(p+1)]$. En séparant les deux termes du numérateur, on obtient bien l'expression demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. **Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).**

Pour vérifier l'égalité, on met les deux fractions du membre de droite au même dénominateur, $p(p+1)$. Le numérateur obtenu est $(p+1) - p$, qui se réduit à 1. On retrouve donc le membre de gauche. L'égalité est valable pour les valeurs de p pour lesquelles les fractions sont définies.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{(p+1) - p}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)}.$$

Question 3. **Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, 1/(p + 1), e^(-p)/p et e^(-p)/(p + 1).**

On reconnaît d'abord les transformées usuelles du formulaire : l'échelon unité correspond à $1/p$, et $e^{-t}U(t)$ correspond à $1/(p+1)$. Pour les deux termes contenant e^{-p}, on applique la propriété de retard d'une unité : la fonction est décalée de 1 et nulle avant cet instant. On écrit les réponses avec U pour rendre explicite cette causalité.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\mathcal{L}^{-1}(1/p) = U(t)$, $\mathcal{L}^{-1}(1/(p+1)) = e^{-t}U(t)$, $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/p) = U(t-1)$, $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/(p+1)) = e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. **Déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.**

La décomposition $1/[p(p+1)] = 1/p - 1/(p+1)$ permet d'inverser chaque terme de $S(p)$. Le premier terme donne $2(1 - e^{-t})$ pour $t \geq 0$. Le terme retardé est multiplié par $U(t-1)$: sur l'intervalle $[0; 1[$, cet échelon vaut 0. Il ne contribue donc pas à l'expression de la sortie sur l'intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. **Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis sous forme approchée au dixième.**

On utilise l'expression valable pour $t \geq 1$ et on remplace t par 1 : $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$. Comme $e \cdot e^{-1} = 1$, cette expression se simplifie en $2 - 2/e$. Son évaluation donne environ 1,264 ; arrondie au dixième, la valeur est 1,3.

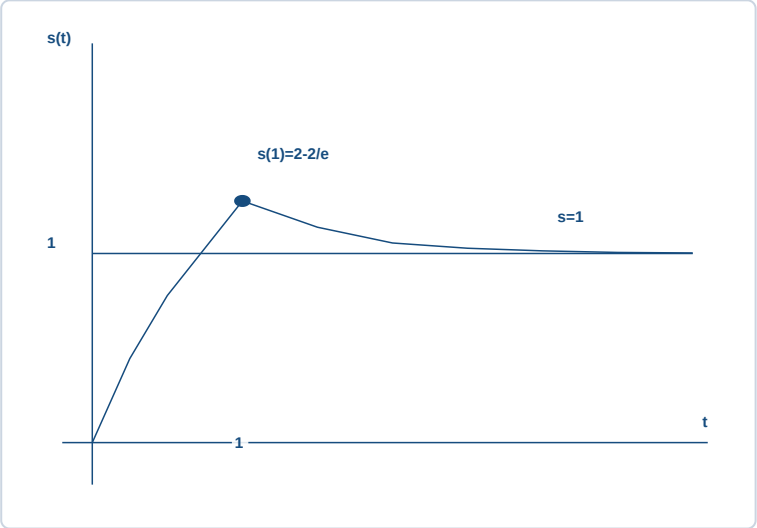
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1,3.$

Question 5.b. **Compléter sur le document-réponse la courbe représentative de la fonction s.**

Sur $[0;1[$, la sortie suit $2(1-e^{-t})$: elle croît de 0 jusqu'à $s(1) = 2 - 2/e$. Pour $t \geq 1$, elle suit $1 + (e-2)e^{-t}$. Comme $e - 2 > 0$, elle décroît ensuite vers 1. La courbe rejoint donc la valeur atteinte en $t = 1$, puis se rapproche de l'asymptote horizontale d'équation $s = 1$.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

La courbe croît de $(0;0)$ à $(1;2-2/e)$, puis décroît vers l'asymptote $s = 1$.

Question 5.c. **Donner la limite de s(t) lorsque t tend vers +∞.**

Pour $t \geq 1$, on a $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, e^{-t} tend vers 0. Le terme $(e-2)e^{-t}$ tend donc lui aussi vers 0, tandis que le terme constant reste égal à 1. La limite de la fonction est ainsi égale à 1.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, code 22MATGRB2, durée 2 heures, coefficient 1,5 ou 2 selon la spécialité. Les deux exercices, notés chacun sur 10, portent sur le freinage d'un chariot modélisé par une équation différentielle, puis sur les signaux d'un système électrique étudiés par transformées de Laplace. Les compétences évaluées incluent calcul, analyse et représentation graphique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale est la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène.
- Si f(t) tend vers une limite finie L à l'infini, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La transformée de Laplace de U(t - a) est e^(-ap)/p, et le décalage temporel introduit un facteur exponentiel.
- La distance parcourue sur un intervalle est l'intégrale de la vitesse sur cet intervalle.

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale pour déterminer la constante de la solution de l'équation différentielle.
- Pour le tableau de variation, relier le signe de la dérivée aux variations et indiquer les valeurs ou limites aux bornes.
- En transformées de Laplace, respecter les facteurs de décalage et vérifier les décompositions en éléments simples.
- Sur les courbes, respecter les axes, les intervalles, les niveaux des signaux et les instants de changement.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre une équation différentielle linéaire avec un second membre constant ?

Résolvez d'abord l'équation homogène associée. Cherchez ensuite une solution particulière, ici constante, puis additionnez les deux formes. Utilisez enfin la condition initiale pour déterminer la constante de la solution recherchée.

Q : Comment traiter le décalage U(t - 1) avec la transformée de Laplace ?

La transformée de U(t - a) est e^(-ap)/p. Le facteur exponentiel représente le décalage temporel a. Pour retrouver le signal, appliquez cette propriété et combinez les transformées inverses usuelles en utilisant la linéarité.

Q : Comment gérer le temps dans cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points. Traitez d'abord les questions dont la méthode vous est familière, en tenant compte des parties indépendantes. Réservez du temps pour les calculs exacts, les arrondis demandés et les tracés sur le document-réponse.

Q : Quelles consignes de présentation sont explicitement demandées dans le sujet ?

Le sujet demande certaines valeurs exactes et approchées, un arrondi au centimètre pour la distance et au dixième pour s(1), ainsi que des tracés sur le document-réponse. Le choix multiple sur le développement limité ne demande aucune justification.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsdietetique.fr/assets/annales/bts-dietetique/E2 - Mathématiques/2022/BTS Diététique - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Diététique : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.