Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS DIÉTÉTIQUE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 selon la spécialité, 3 pour Traitement des matériaux**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation du freinage d'un chariot** (12 questions) — **Page 3**
2. **Conformité et durée de vie des tubes fluorescents, estimation d'une proportion** (9 questions) — **Page 7**
3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsdietetique.fr/assets/annales/bts-dietetique/E2 - Mathématiques/2022/BTS Diététique - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Modélisation du freinage d'un chariot

Un chariot de fête foraine se déplace initialement à 20 m·s⁻¹, puis son freinage est étudié à l'aide de sa fonction vitesse. Les questions portent sur une équation différentielle, l'étude de la fonction, la distance parcourue et le développement limité au voisinage de zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E₀) : y′ + 0,8y = 0, en utilisant la formule fournie.

La formule fournie indique que les solutions de $y' + ay = 0$ sont $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, le coefficient est $a = 0,8$. En le remplaçant dans la formule, on obtient la solution générale sur l'intervalle considéré $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. On définit g(t) = 5 sur [0 ; +∞[. Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle (E) : y′ + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ a pour dérivée $g'(t) = 0$.

On vérifie l'équation en substituant g dans son membre de gauche : $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Cette égalité étant vraie pour tout $t \in [0; +\infty[$, g est bien une solution de (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de (E).

Question 1. c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y′ + 0,8y = 4.

Comme $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E), toute autre solution s'obtient en lui ajoutant une solution de l'équation homogène (E_0). Celle-ci est de la forme $ke^{-0,8t}$.

1. Solution homogène : $ke^{-0,8t}$.
2. Solution générale de (E) : $ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

La solution générale est $f(t) = ke^{-0,8t} + 5$. À $t = 0$, la condition initiale donne $f(0) = k + 5 = 20$, puisque $e^0 = 1$. Donc $k = 20 - 5 = 15$. En remplaçant k dans la solution générale, on obtient la fonction vitesse du chariot sur l'intervalle étudié.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, pour $t \in [0; +\infty[$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. **Pour f(t) = 15e^(−0,8t) + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.**

Quand t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t}$ tend vers zéro. Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel tend alors vers zéro et le terme constant reste égal à 5. La limite de $f(t)$ est donc 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. **Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 5. La courbe représentative admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$, d'ordonnée égale à cette limite.

> Une droite horizontale d'ordonnée 5 a pour équation $y = 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. **Sachant que f'(t) = −12e^(−0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.**

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$: la fonction est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 15 + 5 = 20$, et sa limite en $+\infty$ est 5.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Le chariot s'arrête si sa vitesse atteint zéro. Or $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, et le terme exponentiel est positif pour tout temps fini.

- La vitesse reste supérieure à 5.
- Elle tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, et non vers zéro.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non, le chariot ne s'arrête pas selon ce modèle.

Question 4. a. Pour F(t) = −18,75e^(−0,8t) + 5t, vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. La dérivée du terme exponentiel utilise la règle de chaîne.

1. $\left(-18,75e^{-0,8t}\right)' = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} = 15e^{-0,8t}$.
2. $(5t)' = 5$, donc $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$.

Ainsi, F est une primitive de f.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Question 4. b. À l'aide de la formule d = ∫ de t₀ à t₁ f(t)dt, calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre t₀ = 0 et t₁ = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

Par le théorème fondamental de l'analyse, $d = F(1) - F(0)$. On a $F(1) = -18,75e^{-0,8} + 5$ et $F(0) = -18,75$. Donc $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$, soit environ $15,3251$ m. Arrondie au centimètre, cette distance vaut $15,33$ m.

$$d = F(1) - F(0)$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m}$, soit $15,33\ \mathrm{m}$ au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. Question à choix multiples : recopier l'unique expression exacte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.

La partie régulière affichée est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste doit s'écrire $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ quand $t \to 0$. Parmi les réponses proposées, seule la troisième respecte cette forme du reste. De plus, $\frac{24}{5} = 4,8$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. D'après l'énoncé, $f(0) = 20$, et $f'(0) = -12e^0 = -12$.

La tangente passe donc par $(0; 20)$ et a pour coefficient directeur -12.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 20 - 12t$.

2. Conformité et durée de vie des tubes fluorescents, estimation d'une proportion

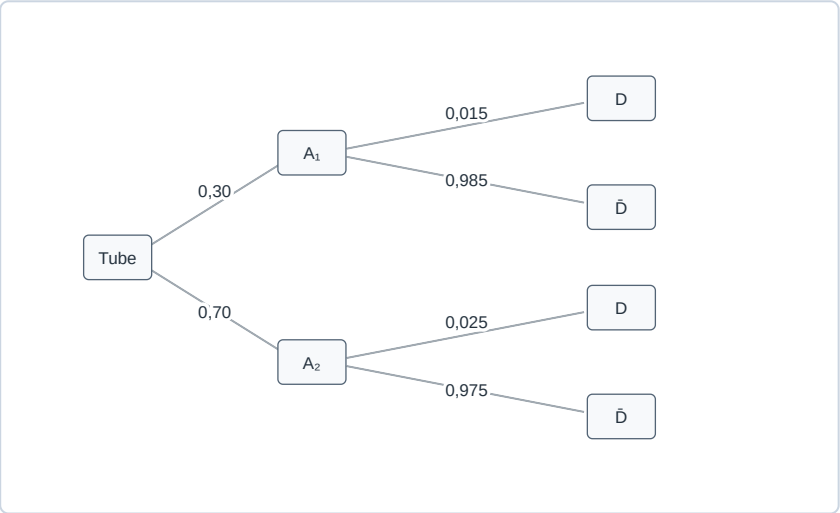
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des proportions de production et des taux de défaut distincts. L'exercice étudie les probabilités conditionnelles, la durée de vie des tubes selon une loi exponentielle et l'estimation de la proportion de rivets conformes.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré représentant la situation à partir des proportions de production des deux ateliers et de leurs taux de défaut.

On sépare d'abord la production selon l'atelier, puis chaque atelier selon la présence ou l'absence d'un défaut. Les probabilités de la deuxième étape sont conditionnelles à l'atelier. Pour chaque atelier, les deux issues complémentaires ont une somme égale à 1 : le taux de tubes sans défaut se déduit donc du taux de défaut.

Arbre pondéré de la production



D : tube présentant un défaut ; D̄ : tube sans défaut.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre : A_1 (0,30), A_2 (0,70) ; depuis A_1 : D (0,015), D̄ (0,985) ; depuis A_2 : D (0,025), D̄ (0,975).

Question 2. Calculer la probabilité $P(A_1 \cap D)$ qu'un tube provienne de l'atelier 1 et présente un défaut.

La probabilité recherchée correspond au chemin de l'arbre qui mène d'abord à l'atelier 1, puis à un tube défectueux. On multiplie la proportion de tubes provenant de cet atelier par son taux conditionnel de défaut : $P(A_1 \cap D) = P(A_1)P(D \mid A_1) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$. Cette probabilité concerne la production totale.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit $0,45\,\%$ de la production totale.

Question 3. **Calculer P(D), la probabilité qu'un tube choisi au hasard dans la production totale présente un défaut, à partir des données des deux ateliers.**

Les événements « provenir de l'atelier 1 » et « provenir de l'atelier 2 » couvrent toute la production. Par la formule des probabilités totales, $P(D) = 0,30 \times 0,015 + 0,70 \times 0,025 = 0,022$. Les données de l'énoncé conduisent donc à 0,022 ; la valeur imprimée 0,0195 ne concorde pas avec les deux taux indiqués.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Avec les données fournies : $P(D) = 0,022$, soit $2,2\,\%$. La valeur 0,0195 imprimée est incohérente.

Question 4. **Sachant que le tube ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

On applique la formule d'une probabilité conditionnelle : $P(A_2 \mid \overline{D}) = \frac{P(A_2 \cap \overline{D})}{P(\overline{D})}$. Le numérateur vaut $0,70 \times 0,975$, et le dénominateur vaut $1 - 0,022 = 0,978$, d'après la probabilité totale de défaut. Le quotient est ensuite arrondi au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) = \frac{0,70 \times 0,975}{0,978} \approx 0,698$, soit environ $69,8\,\%$.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **Pour une durée de bon fonctionnement T suivant une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001, déterminer l'espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

La page du sujet indique le paramètre $\lambda = 0,0001$ par heure. Pour une loi exponentielle, $E(T) = \frac{1}{\lambda}$, donc $E(T) = \frac{1}{0,0001} = 10\,000$ heures. En moyenne, un tube prélevé au hasard fonctionne ainsi pendant 10 000 heures avant de présenter une défaillance.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 10\,000$ heures : c'est la durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube.

Question 2. **Calculer, avec un arrondi au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement du tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

Le sujet donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$, avec $\lambda = 0,0001$. La loi exponentielle étant continue, $P(T < 8\,000) = P(T \leq 8\,000)$. Ainsi, $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0,0001 \times 8\,000} \approx 0,55067$. Après arrondi au centième, on obtient 0,55.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8\,000) \approx 0,55$.

Question 3. Calculer, avec un arrondi au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement du tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

La probabilité de dépasser 10 000 heures est le complément de celle de fonctionner au plus 10 000 heures. Donc $P(T > 10\,000) = 1 - P(T \leq 10\,000) = e^{-0,0001 \times 10\,000} \approx 0,36788$. L'arrondi au centième demandé dans l'énoncé donne 0,37.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0,37$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. À partir de l'échantillon de 1 000 rivets dont 975 sont conformes, donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée des rivets conformes dans l'échantillon. On divise le nombre de rivets conformes, 975, par l'effectif total, 1 000 : $f = \frac{975}{1000} = 0,975$. Cette fréquence observée sert d'estimation de la proportion dans toute la production.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Estimation ponctuelle : $f = 0,975$, soit $97,5\,\%$.

Question 2. Déterminer, à l'aide de la formule fournie, un intervalle de confiance centré sur la fréquence observée pour la proportion p au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.

On utilise la formule fournie avec $f = 0,975$ et $n = 1000$. La marge est $1,96\sqrt{\frac{0,975(1-0,975)}{1000}} \approx 0,009677$. L'intervalle centré sur f a donc pour bornes $0,975 - 0,009677$ et $0,975 + 0,009677$. On arrondit chacune au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

SYNTHÈSE DE L'ÉPREUVE & RÉFÉRENTIEL • BTS DIÉTÉTIQUE

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, code 22MATGRB1, d'une durée de 2 heures. Le coefficient est 2 selon la spécialité et 3 en Traitement des matériaux. Les deux exercices étudient le freinage d'un chariot et la production de tubes fluorescents : équation différentielle, fonction exponentielle, probabilités conditionnelles, loi exponentielle et intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour résoudre y′ + ay = b, ajouter à la solution générale de l'équation homogène une solution particulière de l'équation complète.
- Si f(t) tend vers L quand t tend vers +∞, la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- Pour T de loi exponentielle de paramètre λ, P(T ≤ t) = 1 − e^(−λt) et E(T) = 1/λ.
- L'intervalle de confiance à 95 % fourni est f ± 1,96√(f(1 − f)/n), où f est la fréquence observée.

Points de vigilance & attentes du jury

- Après avoir trouvé la solution générale de l'équation différentielle, appliquer la condition initiale f(0) = 20.
- Pour les variations, étudier le signe de f′ sur [0 ; +∞[et prendre en compte la limite de f.
- Dans l'arbre, inscrire les probabilités conditionnelles des défauts et leurs complémentaires sans confondre atelier et événement.
- Pour l'intervalle de confiance, utiliser f = 975/1 000 et n = 1 000, puis arrondir les bornes à 10^{-3} près.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du freinage ?

Résoudre d'abord y′ + 0,8y = 0, puis ajouter une solution particulière de l'équation complète. Utiliser ensuite f(0) = 20 pour déterminer la constante et obtenir la fonction vitesse.

Q : Comment calculer la probabilité que le tube fonctionne plus de 10 000 heures ?

La formule fournie donne P(T ≤ t) = 1 − e^(−λt). Pour la probabilité de dépassement, prendre le complément : P(T > t) = e^(−λt), puis remplacer λ et t par les valeurs de l'énoncé.

Q : Le sujet donne-t-il un temps conseillé ou un barème par question ?

La durée totale est de 2 heures. Chaque exercice vaut 10 points, mais le sujet ne précise ni répartition des points entre les questions ni temps conseillé pour chaque partie.

Q : Quelle fréquence faut-il utiliser pour l'intervalle de confiance ?

La fréquence observée est f = 975/1 000, soit 0,975, et la taille de l'échantillon est n = 1 000. Appliquer la formule fournie avec 1,96, puis arrondir chaque borne à 10^{-3} près.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsdietetique.fr/assets/annales/bts-dietetique/E2 - Mathématiques/2022/BTS Diététique - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Diététique : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.