Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Départ d'un train à très haute vitesse et calcul de l'aire d'une pièce (13 questions) **Page 3**

2. Probabilités et test d'hypothèse sur l'obsolescence des smartphones (13 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsdietetique.fr/assets/annales/bts-dietetique/E2 - Mathématiques/2018/BTS Diététique - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Départ d’un train à très haute vitesse et calcul de l’aire d’une pièce

Le départ d’un wagon propulsé dans un tube à basse pression est étudié à l’aide d’une fonction donnant la distance parcourue au cours du temps, afin d’évaluer sa vitesse. L’exercice demande aussi de calculer l’aire hachurée d’une pièce dessinée pour une future gare, à partir de son schéma, de sa symétrie et d’une fonction décrivant son bord inférieur.

A. Résolution d’une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l’équation différentielle homogène y' - 0,2y = 0.

On écrit l’équation sous la forme usuelle *y' + ay = 0*, avec *a = -0,2*. D’après la formule fournie, les solutions sont de la forme $y(t) = k\,e^{0,2t}$. La constante *k* peut prendre toute valeur réelle. Cette famille constitue l’ensemble des solutions sur *[0, +∞[*.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = ke^{0,2t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2°. Vérifier que la fonction g définie sur [0, 3] par g(t) = -15t - 75 est une solution de l’équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

La dérivée de la fonction proposée est $g'(t) = -15$. En remplaçant g et g' dans le membre de gauche, on obtient :

$$g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = 3t.$$

Cette égalité est vérifiée pour tout $t \in [0, 3]$. La fonction g est donc bien une solution de l’équation différentielle.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> g est bien une solution de l’équation différentielle.

Question 3°. En déduire l’ensemble des solutions de l’équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

La solution générale de l’équation avec second membre s’obtient en ajoutant à une solution particulière la solution générale de l’équation homogène associée. Ici, la solution particulière est $g(t) = -15t - 75$, et les solutions homogènes sont $ke^{0,2t}$. La constante k reste arbitraire.

- Solution homogène : $ke^{0,2t}$.
- Solution particulière : $-15t - 75$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 4°. Déterminer la fonction f solution de l’équation différentielle y' - 0,2y = 3t qui vérifie la condition initiale f(0) = 0.

On part de la famille $f(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$. La condition initiale impose $f(0) = k - 75 = 0$, donc $k = 75$. En remplaçant cette constante dans l’expression générale, on obtient la fonction demandée.

Condition initiale	Constante
$f(0) = 0$	$k = 75$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t$.

B. Étude de fonction et application

Question 1° a). À partir des expressions fournies par le logiciel de calcul formel, résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

D'après le calcul formel, $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15 = 15(e^{0,2t} - 1)$. Comme $t \geq 0$, on a $e^{0,2t} \geq 1$, donc $f'(t) \geq 0$ sur tout l'intervalle étudié. L'égalité est atteinte en $t = 0$, et la dérivée est strictement positive pour $t > 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 3]$.

Question 1° b). Déduire du résultat précédent les variations de la fonction f sur [0, 3].

Comme $f'(t) \geq 0$ sur $[0, 3]$, la fonction f est croissante sur cet intervalle. Aux bornes, $f(0) = 0$ et $f(3) = 75(e^{0,6} - 1) - 45 \approx 16,659$. Le tableau résume les variations et les valeurs prises aux extrémités.

t	**0**	**3**
$f(t)$	0	16,659
Variation	Croissante	

✓ RÉPONSE À RETENIR

f croît de 0 à environ 16,659 sur $[0, 3]$.

Question 2°. Déterminer le nombre de kilomètres parcourus par le wagon au bout d'une minute et arrondir le résultat au dixième.

La distance parcourue après une minute est $f(1)$. On remplace t par 1 dans l'expression de la fonction :

$$f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15 \approx 1,605.$$

La distance est exprimée en kilomètres. Arrondie au dixième, elle vaut donc 1,6 km.

✓ RÉPONSE À RETENIR

1,6 km.

Question 3° a). En utilisant le fait que la vitesse du wagon à l'instant t correspond à f'(t), déterminer sa vitesse à t = 2 minutes, en kilomètres par minute, et arrondir au dixième.

La vitesse instantanée est donnée par $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$, en kilomètres par minute. À $t = 2$, on obtient $f'(2) = 15e^{0,4} - 15 \approx 7,377$. L'arrondi au dixième donne 7,4 km/min. Il s'agit bien de la vitesse à deux minutes, sans conversion d'unité.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$7,4$ km/min.

Question 3° b). Dire si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse au regard de la vitesse visée de 400 km·h⁻¹ en moins de deux minutes.

On convertit d'abord la vitesse visée dans l'unité de f' : $400\ \text{km/h} = 400/60 \approx 6,667\ \text{km/min}$. À deux minutes, la vitesse vaut environ $7,377\ \text{km/min}$. Comme elle augmente sur $[0,3]$, elle dépasse le seuil avant $t = 2$.

- Seuil : $6,667$ km/min.
- Vitesse à deux minutes : $7,377$ km/min.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, l'objectif est atteint avant deux minutes.

Question 4°. Choisir parmi les trois propositions l'équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 2, puis recopier la réponse sans justification.

La tangente en $t = 2$ a pour pente $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1)$ et passe par le point d'ordonnée $f(2) = 75(e^{0,4} - 1) - 30$. La formule de la tangente donne $y = f'(2)(t - 2) + f(2)$. Après développement, on retrouve la troisième proposition.

Proposition correcte
$y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$.

C. Calcul intégral

Question 1°. À partir du schéma et des dimensions de la pièce, choisir parmi les valeurs proposées l'aire A1 du rectangle OPQR, en unités d'aire.

Le rectangle $OPQR$ s'étend de $x = 0$ à $x = 3$, donc sa largeur est 3. Sa hauteur est celle du bord supérieur, $y = 2,25$. Le repère ayant pour unité graphique un mètre sur chaque axe, son aire est $3 \times 2,25 = 6,75$ unités d'aire. Il faut retenir la proposition correspondante.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A_1 = 6,75$ u. a.

Question 2°. En exploitant la primitive fournie, calculer l'aire A2 de la partie du plan limitée par la courbe de g(x) = 27x/(2x² + 18), l'axe des abscisses et les droites x = 0 et x = 3.

La fonction g est positive sur $[0,3]$. L'aire cherchée est donc l'intégrale de g sur cet intervalle. Avec la primitive fournie :

$$A_2 = \left[\tfrac{27}{4}\ln(x^2+9)\right]_0^3 = \tfrac{27}{4}\ln\left(\tfrac{18}{9}\right) = \tfrac{27}{4}\ln 2.$$

Ainsi, $A_2 \approx 4,679$ unités d'aire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ u. a.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'aire A de la pièce hachurée, en tenant compte de sa symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, et arrondir au millième.

Sur la moitié droite, l'aire hachurée est celle du rectangle moins l'aire sous la courbe, soit $A_1 - A_2$. La pièce étant symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on double cette aire :

$A = 2(A_1 - A_2) = 2\left(6,75 - \frac{27}{4}\ln 2\right) \approx 4,142.$

L'unité graphique étant le mètre sur les deux axes, l'aire s'exprime en mètres carrés.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A \approx 4,142\ \text{m}^2$.

2. Probabilités et test d'hypothèse sur l'obsolescence des smartphones

L'exercice étudie les obsolescences technique et logicielle dans une population de smartphones, puis le nombre d'appareils non réparables dans un lot prélevé au service après-vente. Il se termine par un test bilatéral visant à vérifier une affirmation de sondage sur la marque B.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des informations de l'énoncé sur 200 smartphones, recopier et compléter le tableau des effectifs selon que les appareils sont touchés ou non par l'obsolescence technique et logicielle.

Smartphones	Touchés par l'obsolescence logicielle	Non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
Touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
Non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

Les effectifs totaux sont 6 appareils touchés techniquement et 16 touchés par logiciel. Parmi ces 16, 12,5 % sont aussi touchés techniquement, soit 2 appareils. Les autres cases se déduisent des totaux.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Tableau complété : 2, 4, 14 et 180 ; totaux par ligne 6 et 194, totaux par colonne 16 et 184, total 200.

Question 2°. Pour T : « le smartphone est touché par l'obsolescence technique » et L : « le smartphone est touché par l'obsolescence logicielle », donner P(T), P(L) et P_L(T), la probabilité de T sachant L.

L'énoncé donne directement les proportions de smartphones touchés par chaque type d'obsolescence. La proportion de smartphones touchés techniquement parmi ceux touchés par logiciel fournit la probabilité conditionnelle demandée.

$$P(T) = 0{,}03,\ P(L) = 0{,}08 \text{ et } P_L(T) = 0{,}125.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0{,}03,\ P(L) = 0{,}08$ et $P_L(T) = 0{,}125$.

Question 3° a). Calculer la probabilité qu'un smartphone soit touché à la fois par l'obsolescence technique et l'obsolescence logicielle : P(T ∩ L).

La relation de probabilité conditionnelle donne $P(T \cap L) = P_L(T) \times P(L)$. On obtient $0{,}125 \times 0{,}08 = 0{,}01$, ce qui correspond à 2 smartphones sur 200.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T \cap L) = 0{,}010$.

Question 3° b). Calculer la probabilité qu'un smartphone soit touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence : P(T ∪ L).

Pour obtenir la probabilité d'être touché par au moins un type d'obsolescence, on additionne les deux probabilités et on retranche l'intersection, comptée deux fois :

$$P(T \cup L) = 0{,}03 + 0{,}08 - 0{,}01 = 0{,}10.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T \cup L) = 0{,}100$.

Question 3° c). Calculer P_T(L), la probabilité qu'un smartphone soit touché par l'obsolescence logicielle sachant qu'il est touché par l'obsolescence technique.

Par définition, $P_T(L) = \frac{P(T \cap L)}{P(T)}$.

Donc $P_T(L) = \frac{0{,}01}{0{,}03} = \frac{1}{3}$, soit environ 0,333 à 10^{-3} près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P_T(L) \approx 0{,}333$.

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que la variable aléatoire X, qui compte les smartphones non réparables dans un lot de 50, suit une loi binomiale, puis en déterminer les paramètres.

Chaque prélèvement est un essai de Bernoulli, avec une probabilité $0{,}045$ d'obtenir un smartphone non réparable. Les tirages sont assimilés à des tirages avec remise, donc indépendants et de même probabilité. Le nombre de smartphones non réparables parmi 50 suit une loi binomiale.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0{,}045)$.

Question 2°. Calculer la probabilité que tous les smartphones d'un lot de 50 soient réparables.

Tous les smartphones sont réparables si aucun n'est non réparable. La probabilité qu'un smartphone soit réparable vaut $1 - 0{,}045 = 0{,}955$. L'indépendance des 50 tirages donne :

$$P(X = 0) = 0{,}955^{50} \approx 0{,}100.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité que les 50 smartphones soient réparables est $0{,}100$.

Question 3° a). Faire tourner à la main l'algorithme et compléter le tableau avec P(X = i) et la valeur cumulée de S pour i allant de 0 à 3.

À chaque étape, l'algorithme ajoute $P(X = i)$ à la somme précédente. Les valeurs affichées sont arrondies à 10^{-3}.

i	**0**	**1**	**2**	**3**
$P(X = i)$	0,100	0,236	0,272	0,205
S **cumulée**	0,100	0,336	0,608	0,813

✓ RÉPONSE À RETENIR

Probabilités : 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. Sommes cumulées : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question 3° b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte du nombre de smartphones non réparables.

À la fin de la boucle, S additionne les probabilités pour $X = 0, 1, 2, 3$. Elle représente donc la probabilité qu'un lot compte au plus 3 smartphones non réparables.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $S \approx 0{,}813$: environ 81,3 % des lots ont au plus 3 smartphones non réparables.

Question 4°. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat.

Pour une loi binomiale, $E(X) = np$. Ici, $E(X) = 50 \times 0{,}045 = 2{,}25$.

Sur un grand nombre de lots de 50 appareils, on observera en moyenne 2,25 smartphones non réparables par lot.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(X) = 2{,}25$ smartphones non réparables par lot en moyenne.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Sous H0, où F suit une loi normale de moyenne 0,55 et d'écart type 0,037, déterminer h tel que P(0,55 - h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95, puis choisir sa valeur arrondie au centième parmi les propositions.

Pour une loi normale, l'intervalle central de probabilité 0,95 correspond à environ 1,96 écarts-types de part et d'autre de la moyenne. Ainsi, $h \approx 1{,}96 \times 0{,}037 = 0{,}07252$, soit 0,07 au centième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Choix : $h \approx 0{,}07$.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral de niveau 5 % portant sur H0 : p = 0,55 et H1 : p ≠ 0,55.

Au seuil de 5 %, l'intervalle d'acceptation est centré sur 0,55, avec une demi-largeur arrondie $h = 0{,}07$:

- Si la fréquence observée appartient à $[0{,}48\,;\,0{,}62]$, on ne rejette pas H_0.
- Sinon, on rejette H_0 au profit de H_1.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 si $0{,}48 \leq f \leq 0{,}62$; sinon, rejeter H_0.

Question 3°. Pour l'échantillon de 180 personnes dont 76 déclarent que la marque B pratique l'obsolescence programmée, appliquer la règle de décision et donner la conclusion du test.

La fréquence observée vaut $f = \frac{76}{180} \approx 0{,}422$. Elle est inférieure à la borne basse 0,48 de l'intervalle d'acceptation. La fréquence se situe donc dans la zone de rejet.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

On rejette H_0 au seuil de 5 % : l'échantillon ne confirme pas l'affirmation $p = 0{,}55$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2018, groupement B, code MATGRB1, durée de deux heures et coefficient variable selon la spécialité. Les deux exercices portent sur la modélisation du départ d'un train à très haute vitesse, le calcul d'une aire, les probabilités conditionnelles, la loi binomiale et un test d'hypothèse sur l'obsolescence programmée des smartphones.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour une équation différentielle linéaire, la solution générale est la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.
- La vitesse instantanée est la dérivée de la distance : ici f'(t) s'exprime en kilomètres par minute.
- Pour X suivant une loi binomiale de paramètres n et p, P(X = k) = C(n,k)p^k(1-p)^(n-k) et E(X) = np.
- Dans un test bilatéral au seuil de 5 %, l'intervalle central sous H0 contient 95 % des valeurs.

Points de vigilance & attentes du jury

- Convertir la vitesse en kilomètres par minute en kilomètres par heure avant de la comparer à l'objectif de 400 km·h⁻¹.
- Pour l'aire hachurée, soustraire l'aire sous la courbe de celle du rectangle sur une moitié, puis utiliser la symétrie.
- Distinguer P(T sachant L) de P(L sachant T) et identifier clairement l'événement conditionnant.
- Pour le test, comparer la fréquence observée aux bornes de décision et conclure au rejet ou au non-rejet de H0.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre une équation différentielle linéaire avec un second membre ?

On résout d'abord l'équation homogène associée, puis on cherche une solution particulière. La solution générale est leur somme. Une condition initiale permet ensuite de déterminer la constante de la solution homogène.

Q : Comment calculer l'aire demandée à partir de la primitive fournie ?

L'aire sous une fonction positive sur [a,b] est l'intégrale, égale à G(b) - G(a) pour une primitive G. Pour la pièce, on soustrait cette aire de celle du rectangle sur une moitié, puis on double par symétrie.

Q : Comment organiser le temps pour cette épreuve de deux heures ?

L'épreuve comporte deux exercices de 10 points. Répartissez le temps entre les deux exercices, traitez d'abord les questions accessibles et gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités et les arrondis demandés.

Q : Que faut-il indiquer dans la conclusion du test d'hypothèse ?

Il faut appliquer la règle de décision au seuil de 5 %, comparer la fréquence observée à l'intervalle d'acceptation, puis conclure explicitement au rejet ou au non-rejet de H0. Ne dites pas que H0 est prouvée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsdietetique.fr/assets/annales/bts-dietetique/E2 - Mathématiques/2018/BTS Diététique - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Diététique : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.